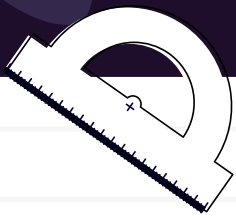


BAB 4

Relasi dan Fungsi





Tujuan Pembelajaran

1. Mengidentifikasi konsep himpunan, relasi, dan fungsi dalam matematika.
2. Menjelaskan relasi dan fungsi (domain, kodomain, range).
3. Menerapkan konsep relasi dan fungsi dalam bentuk diagram panah, tabel, himpunan pasangan berurutan, atau grafik.
4. Menganalisis perbedaan antara fungsi linear dan fungsi nonlinear secara grafik.
5. Mengevaluasi ketepatan nilai suatu fungsi berdasarkan data yang tersedia.
6. Memecahkan masalah yang berkaitan dengan relasi dan fungsi.





Observasi

Rudi dan Rani menempuh jarak yang sama ke sekolah, yaitu 15 km, tetapi dari arah yang berbeda. Rumah Rani berada di sebelah utara sekolah, sedangkan rumah Rudi berada di sebelah timur sekolah. Biasanya, Rani dan Rudi pergi menggunakan angkutan umum (angkot) ke sekolah. Akan tetapi, karena sedang ada aksi mogok angkot, mereka terpaksa naik taksi. Ada hal yang menjadi pertimbangan Rudi dan Rani tentang tarif taksi yang harus mereka bayarkan.

Zona Logika

Sekarang perhatikan permasalahan Rani dan Rudi berikut.

1. Rudi mencatat tarif awal ketika ia masuk taksi “A” sebesar Rp8.000. Selanjutnya, ia mencatat tarif setelah berjalan 1 km menjadi Rp10.500, 2 km menjadi Rp13.000, dan 3 km menjadi Rp15.500.
2. Rani mencatat tarif awal saat ia masuk taksi “B” sebesar Rp10.000. Selanjutnya, ia mencatat saat taksi telah berjalan 1 km menjadi Rp12.000, 2 km menjadi Rp14.000, dan 3 km menjadi Rp16.000
3. Tentukan tarif taksi yang harus dibayarkan oleh Rani dan Rudi. Manakah tarif taksi yang lebih murah? Jelaskan.

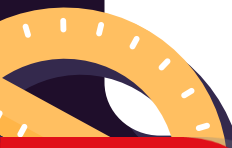


A. Himpunan

Pertanyaan Pemantik

Saat kita pergi ke pasar atau supermarket, sering kali kita jumpai susunan buah-buahan atau sayur-sayuran yang dikelompokkan berdasarkan jenisnya. Kumpulan-kumpulan tersebut dalam matematika disebut sebagai himpunan.

1. Apa yang kamu ketahui tentang himpunan? Jelaskan.
2. Menurut pendapatmu, apakah semua kumpulan merupakan himpunan? Jelaskan.
3. Apakah kamu dapat menyebutkan kumpulan yang dikatakan sebagai himpunan? Coba tuliskan beberapa contohnya.



A. Himpunan

1. Pengertian Himpunan

Himpunan adalah kumpulan objek-objek yang terdefinisi dengan jelas. Objek-objeknya disebut elemen atau anggota dari himpunan tersebut.

Berdasarkan kriteria tersebut, kumpulan makanan lezat atau kumpulan hewan lucu bukan merupakan himpunan. Mengapa? Sebab tidak semua orang memiliki pandangan yang sama tentang hal tersebut. Sementara itu, sekeranjang jeruk dan sekumpulan semut hitam adalah contoh-contoh yang terdefinisi dengan jelas.



A. Himpunan

2. Notasi dan Cara Penyajian Himpunan

Penyajian himpunan dapat dilakukan dengan tiga cara.

a. Menulis himpunan menggunakan kata-kata

Contoh:

- 1) A adalah himpunan nama-nama hari dalam seminggu.
- 2) B adalah himpunan nama-nama bulan dalam setahun.
- 3) C adalah himpunan bilangan asli kurang dari 5.

b. Menulis himpunan dengan cara mendaftar

Contoh:

- 1) A adalah himpunan nama-nama hari dalam seminggu. Penulisan himpunan A dilakukan seperti berikut.

$A = \{\text{Minggu, Senin, Selasa, Rabu, Kamis, Jumat, Sabtu}\}$

- 2) B adalah himpunan bilangan asli kurang dari atau sama dengan 5. Penulisan himpunan B ditulis seperti berikut.

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

A. Himpunan

c. Menulis himpunan dengan notasi pembentuk himpunan

Contoh:

Tuliskan himpunan berikut dengan notasi pembentuk himpunan.

E adalah himpunan bilangan bulat positif kurang dari 4.

Pembahasan:

Dengan menggunakan notasi pembentuk himpunan, cara penulisannya adalah:

$$E = \{x \mid x \text{ bilangan bulat positif kurang dari } 4\}$$

dibaca " E adalah himpunan semua x , dengan syarat x bilangan bulat positif kurang dari 4".



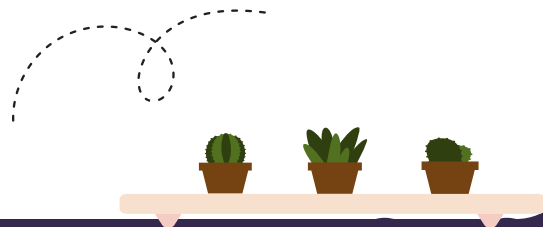
A. Himpunan

3. Himpunan Berhingga, Himpunan Kosong, dan Himpunan Tak Hingga

Pada himpunan, jika banyak anggotanya dapat dihitung, himpunan itu disebut himpunan berhingga. Jika tidak mempunyai anggota, himpunan itu disebut himpunan kosong. Jika anggotanya banyak dan tak terhitung, himpunan itu disebut himpunan tak hingga

Himpunan kosong dilambangkan dengan $\emptyset$ atau $\{ \}$

Lambang untuk menulis banyak anggota himpunan adalah n . Jika A adalah himpunan yang dimaksud, $n(A)$ adalah banyak anggota himpunan A .



A. Himpunan

Kilas Materi

Untuk A berupa himpunan kosong, yakni $A = \emptyset$, maka banyak anggota A ditulis dengan lambang:

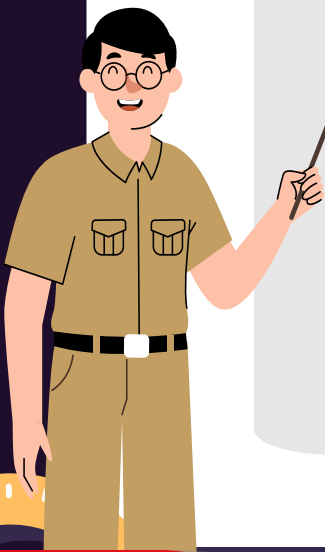
$$n(A) = n(\emptyset) = 0$$

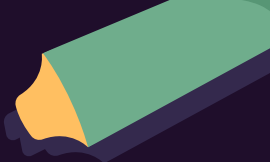
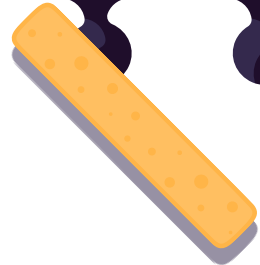
Untuk A berupa himpunan tak hingga, maka:

$$n(A) = \infty$$

sehingga untuk setiap himpunan A , banyak anggota A adalah:

$$0 \leq n(A) \leq \infty$$





AYO UJI PEMAHAMANMU!

Untuk melatih kemampuanmu tentang
Himpunan, kerjakan Asesmen Formatif
halaman 158 dan 159

B. Relasi, Fungsi, dan Representasinya

Pertanyaan Pemantik

1. Dalam matematika terdapat istilah “relasi”. Apakah istilah relasi sama dengan “hubungan” seperti yang kita kenal dalam kehidupan sehari-hari? Jika sama, tuliskan beberapa contohnya.
2. Dalam matematika juga terdapat istilah “fungsi”. Apakah terdapat kaitannya dengan istilah “manfaat” atau “kegunaan” dalam bahasa? Jelaskan pendapatmu.
3. Bagaimana dengan istilah “grafik”? Apakah sama dengan apa yang pernah kita jumpai pada jenjang Sekolah Dasar, di koran, berita televisi, dan sebagainya? Jelaskan.



B. Relasi, Fungsi, dan Representasinya

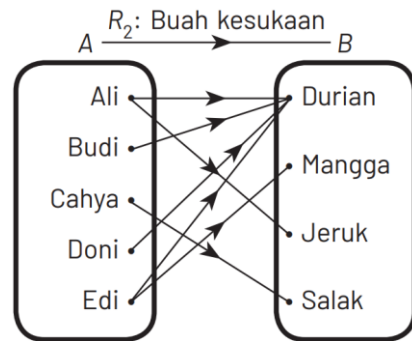
1. Masalah Berkenaan dengan Relasi dan Fungsi

Relasi dua buah himpunan merupakan aturan yang menghubungkan atau mengaitkan antara anggota-anggota himpunan yang satu dengan anggota-anggota himpunan yang lainnya.

Misalkan A adalah himpunan Ali, Budi, Cahya, Doni, dan Edi, sedangkan B adalah himpunan durian, mangga, jeruk, dan salak. Jika kedua himpunan digambarkan dalam bentuk diagram panah, bentuk relasi (R) seperti gambar di samping.

Jika ditulis dalam bentuk himpunan pasangan berurutan, penulisan relasi R "buah kesukaan" adalah seperti berikut.

$R = \{(Ali, durian), (Ali, jeruk), (Budi, durian), (Cahya, salak), (Doni, durian), (Edi, durian), (Edi, mangga)\}.$



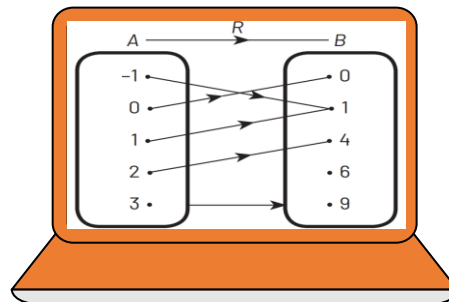
B. Relasi, Fungsi, dan Representasinya

Fungsi dari himpunan A ke himpunan B adalah relasi yang menghubungkan setiap anggota himpunan A dengan tepat satu ke anggota himpunan B .

Jika suatu unsur pertama dalam himpunan pasangan berurutan R muncul lebih dari 1 (satu) kali dengan pasangan unsur kedua yang berbeda, relasi R **bukan** fungsi dari himpunan A ke B .

Dalam bentuk diagram panah, relasi dari himpunan A ke himpunan B yang dilambangkan dengan " $R: A \rightarrow B$ " merupakan fungsi jika memiliki ciri-ciri:

- (1) semua anggota A memiliki kawan di B , dan
- (2) kurva pemasangan dari A ke B tidak ada yang bercabang.

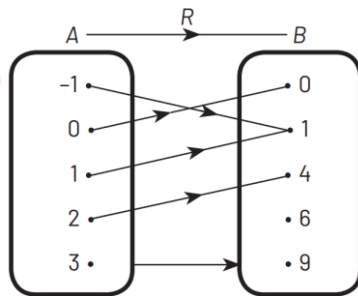


B. Relasi, Fungsi, dan Representasinya

2. Daerah Asal, Daerah Kawan, dan Daerah Hasil Suatu Fungsi

Jika suatu relasi dari himpunan A ke B merupakan fungsi, maka:

- domain: daerah asal,
- kodomain: daerah kawan,
- *range*: daerah hasil.



- Daerah asal (domain) dari fungsi f adalah $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$,
- Daerah kawan (kodomain) fungsi f adalah $B = \{0, 1, 4, 6, 9\}$,
- Daerah hasil (*range*) fungsi f adalah $H = \{0, 1, 4, 9\}$.

B. Relasi, Fungsi, dan Representasinya

3. Banyak Fungsi dari Dua Himpunan

Banyak fungsi dari himpunan A ke himpunan B adalah $n(B)^{n(A)}$.

Contoh:

Diketahui $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Tentukan banyak pemetaan yang mungkin dari A ke B .

Pembahasan:

$$A = \{a, b, c\} \Rightarrow n(A) = 3 \text{ dan } B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow n(B) = 5$$

$$\text{Banyak fungsi dari himpunan } A \text{ ke himpunan } B = n(B)^{n(A)} = 5^3 = 125$$

Jadi, banyak pemetaan yang mungkin dari A ke B adalah 125.



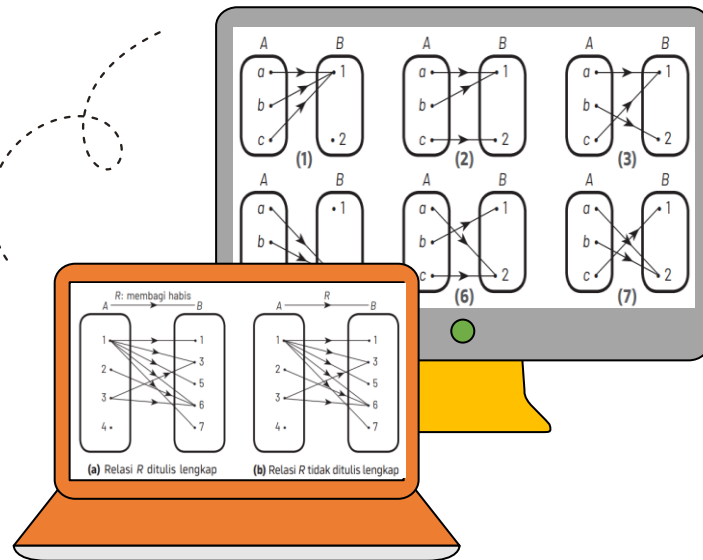
B. Relasi, Fungsi, dan Representasinya

4. Tinjauan Formal (Matematis) Relasi dan Fungsi

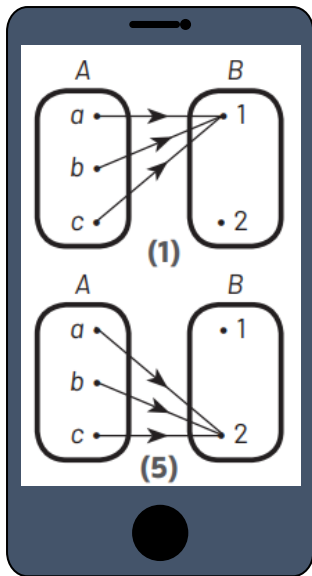


Relasi R dari himpunan A ke himpunan B adalah korespondensi (perkawanan) antara elemen-elemen $x \in A$ dengan elemen-elemen $y \in B$, ditulis dengan lambang " xRy " dengan syarat $x \in A$ dan $y \in B$. Dalam bentuk himpunan pasangan berurutan, relasi R yang dimaksud adalah

$$R = \{(x, y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B\}$$

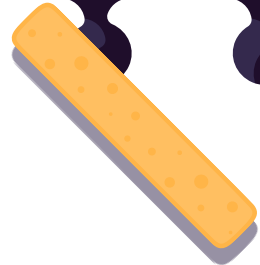


B. Relasi, Fungsi, dan Representasinya



Relasi R dari himpunan A ke himpunan B merupakan fungsi jika memenuhi definisi:

1. Relasi R dari himpunan A ke himpunan B (ditulis $R: A \rightarrow B$) disebut **fungsi** dari himpunan A ke himpunan B (ditulis $f: A \rightarrow B$) jika untuk setiap $x \in A$ terdapat pasangan tunggal $y \in B$ sedemikian sehingga $y = f(x)$.
2. Pada bidang koordinat Cartesius, himpunan semua pasangan berurutan (x, y) atau $(x, f(x))$ berupa kumpulan titik-titik yang disebut grafik fungsi $y = f(x)$.
3. Himpunan H yang merupakan himpunan semua nilai $y = f(x)$ pada grafik itu disebut daerah hasil fungsi f ditulis dengan lambang: $H = \{y \in B \mid y = f(x)\}$



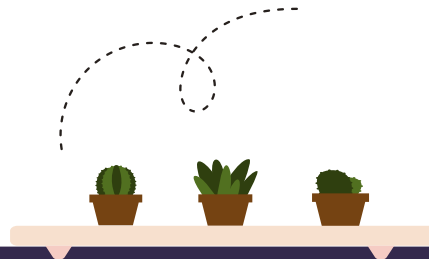
AYO UJI PEMAHAMANMU!

Untuk melatih kemampuanmu
tentang Relasi, Fungsi, dan
Representasinya, kerjakan Asesmen
Formatif halaman 168-170



Pertanyaan Pemantik

1. Menurut pendapatmu, apakah semua fungsi akan memiliki daerah hasil (*range*)?
2. Apa yang kamu ketahui tentang nilai fungsi? Jelaskan.
3. Misalkan diketahui sebuah fungsi dinyatakan dengan rumus $f(x) = 3x + 4$. Dapatkah kamu menghitung nilai fungsi tersebut? Jika iya, hitunglah nilai fungsinya.



1. Menghitung Nilai Suatu Fungsi

Misalkan diketahui fungsi $f: x \rightarrow ax + b$. Fungsi tersebut dapat dinyatakan dalam rumus $f(x) = ax + b$. Pada rumus tersebut, x adalah domain fungsi, sedangkan hasil dari $ax + b$ merupakan *range* fungsi tersebut.

Contoh: Diketahui $f(x) = 2x + 1$ dengan domain $A = \{-1, 0, 1\}$. Tentukan daerah hasil fungsi.

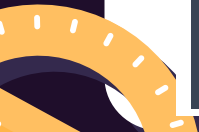
Untuk fungsi $f(x) = 2x + 1$ dengan domain $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, maka:

$$f(-1) = 2(-1) + 1 = -2 + 1 = -1$$

$$f(0) = 2(0) + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$f(1) = 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3$$

Jadi, *range* atau daerah hasil fungsi adalah $\{-1, 1, 3\}$.



C. Nilai Fungsi

2. Fungsi Tak Sederhana

Fungsi dalam x yang variabelnya diganti menjadi $x + 2$, x^2 , xy^2 , dan sebagainya sehingga fungsi yang dimaksud menjadi bentuk $f(x + 2)$, $f(x^2)$, $f(xy^2)$, dan sebagainya, fungsi-fungsi seperti itu selanjutnya dikenal sebagai fungsi-fungsi f yang tidak sederhana.

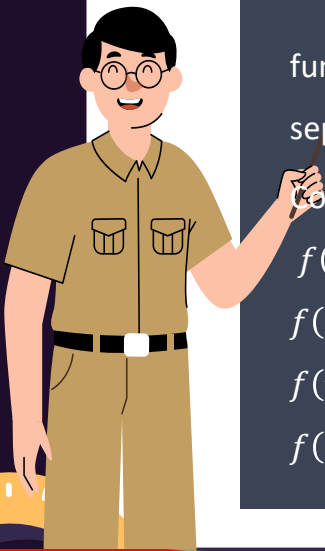
Contoh:

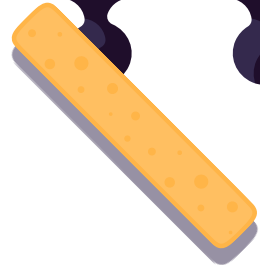
$$f(x) = 2x + 5$$

$$f(3) = 2(3) + 5 = 6 + 5 = 11$$

$$f(u) = 2u + 5$$

$$f(2x - 3) = 2(2x - 3) + 5 = 4x - 6 + 5 = 4x - 1$$





AYO UJI PEMAHAMANMU!

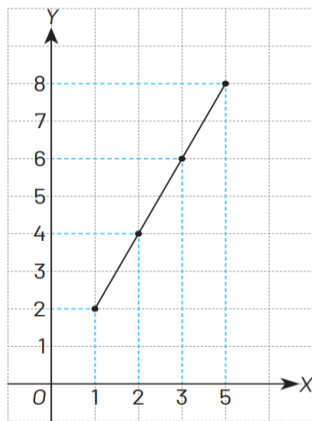
Untuk melatih kemampuanmu tentang Nilai
Fungsi, kerjakan Asesmen Formatif
halaman 174



D. Grafik Fungsi

Pertanyaan Pemantik

Perhatikan bidang koordinat Cartesius berikut. Terdapat beberapa titik koordinat yang dapat dihubungkan dengan garis lurus.



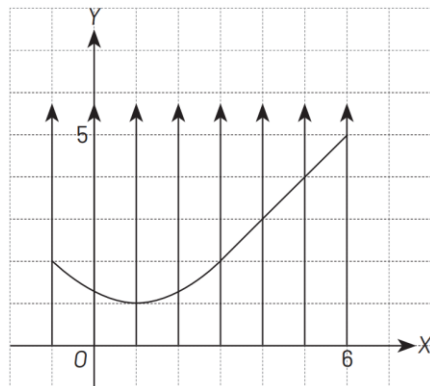
- Apa yang dimaksud dengan titik koordinat? Tuliskan beberapa titik koordinat yang terdapat pada grafik di samping dalam bentuk himpunan pasangan berurutan.
- Berdasarkan jawaban (a), apakah grafik di samping merupakan fungsi? Jelaskan alasan dari jawabanmu.



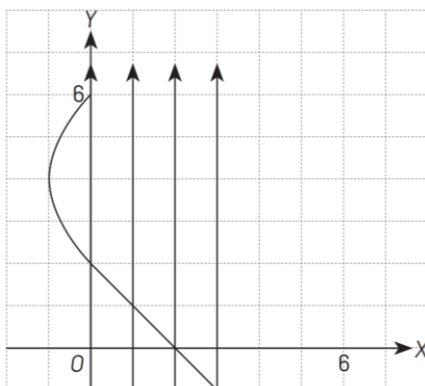
D. Grafik Fungsi

1. Identifikasi Sebuah Kurva Fungsi

Identifikasi berdasarkan ada tidaknya garis-garis yang sejajar sumbu Y memotong kurva (grafik) maksimal di satu titik.



(a)



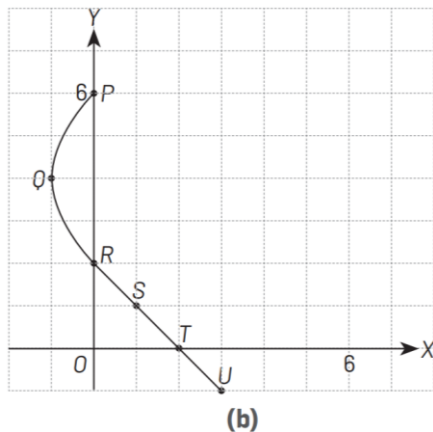
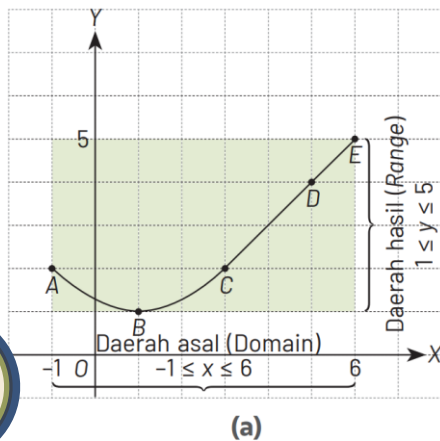
(b)

Kurva (a) merupakan grafik fungsi karena setiap garis sejajar sumbu Y hanya memotong kurva di paling banyak satu titik. Sebaliknya, kurva (b) bukan grafik fungsi karena ada garis sejajar sumbu Y yang memotong kurva di lebih dari satu titik.



D. Grafik Fungsi

Untuk menentukan daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil dari sebuah fungsi yang kurvanya diketahui, cukup dengan menunjukkan adanya daerah persegi panjang yang tepat melingkupi kurva yang dimaksud.

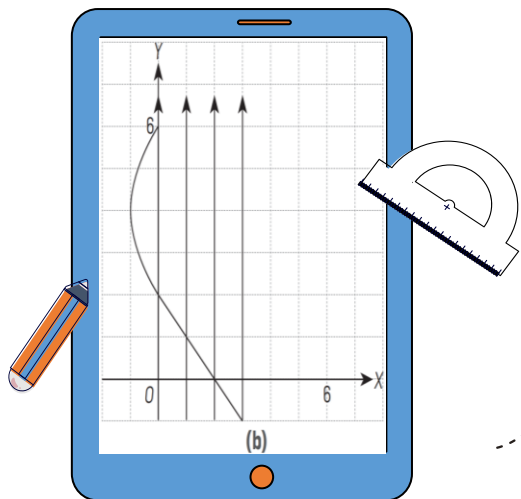


Untuk kurva (a), daerah asal fungsi adalah $f \rightarrow \{x \mid -1 \leq x \leq 6, x \in R\}$, sedangkan daerah hasil fungsi adalah $f \rightarrow \{y \mid 1 \leq y \leq 5, y \in R\}$ dengan $R =$ himpunan bilangan real. Sementara itu, kurva (b) tidak perlu disebutkan daerah asal dan daerah hasil karena kurva (b) bukan fungsi.



D. Grafik Fungsi

2. Fungsi Linear dan Grafiknya

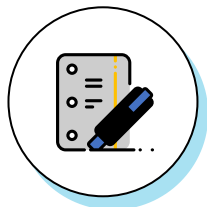


Fungsi linear dalam x adalah fungsi dengan variabel (peubah) x yang berderajat satu, yakni fungsi yang memiliki bentuk umum $f(x) = mx + c$ dengan m dan $c \in R$, R himpunan bilangan real.

Grafik fungsi f dengan variabel (peubah) x adalah grafik $f(x)$ untuk $x \in R$ merupakan kumpulan titik-titik pada kurva dengan persamaan $y = f(x)$.

D. Grafik Fungsi

Langkah-langkah menggambar grafik fungsi linear berbentuk $y = f(x) = ax + b$



Langkah 1

Pilih secara bebas (sembarang) dari dua titik anggotanya, yakni dua titik berkoordinat bilangan bulat yang memenuhi persamaan $y = f(x) = ax + b$.



Langkah 2

Gambarkan kedua titik anggotanya dalam sistem koordinat x dan y .



Langkah 3

Hubungkan kedua titik tersebut dengan sebuah kurva mulus.





AYO UJI PEMAHAMANMU!

Untuk melatih kemampuanmu tentang Grafik
Fungsi, kerjakan Asesmen Formatif
halaman 182

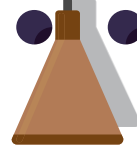
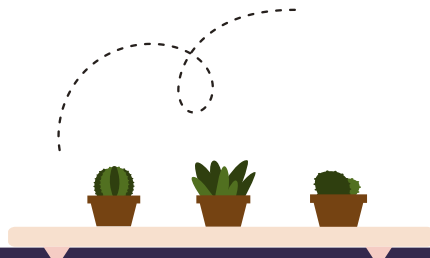


E.

Pemecahan Masalah Menggunakan Relasi dan Fungsi

Pertanyaan Pemantik

1. Jika setiap nomor kursi di sebuah bioskop selalu berurutan dengan selisih yang sama, dapatkah kamu menemukan cara cepat untuk mengetahui nomor kursi ke-50 tanpa menghitung satu per satu?
2. Bayangkan kamu memiliki warung dan setiap harga makanan mengikuti pola tertentu. Bagaimana cara menentukan harga makanan ke-10 tanpa melihat daftar harga satu per satu?



Contoh Soal

Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) adalah perusahaan daerah yang menyediakan dan mendistribusikan kebutuhan air minum pada masyarakat, khususnya masyarakat perkotaan. Misalkan tarif terbaru untuk harga air adalah Rp8.200/m³ dengan biaya abodemen atau biaya berlangganan sebesar Rp10.000/bulan. Jika penggunaan air di suatu rumah pada bulan ini mencapai 25 m³ , tentukan:

- rumus fungsi total biaya bulanan air,
- biaya penggunaan air pada bulan ini.





E.

Pemecahan Masalah Menggunakan Relasi dan Fungsi



Pembahasan

- 
- a. Rumus fungsi total biaya bulanan air terdiri dari komponen tarif air, yaitu Rp8.200/m³ dengan variabel bebas banyak penggunaan air dan variabel terikat atau konstanta yang tidak berubah, yaitu biaya langganan Rp10.000. Dengan demikian, rumus fungsinya adalah:

$$f(x) = 8.200x + 10.000$$

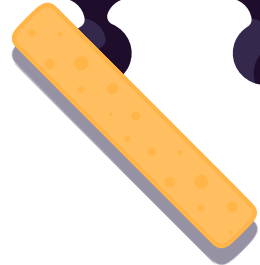
- b. Oleh karena penggunaan air pada bulan ini sebesar 25 m³ , total biaya diperoleh dengan menentukan nilai fungsi untuk $x = 25$.

$$f(x) = 8.200x + 10.000$$

$$f(25) = 8.200(25) + 10.000 = 205.000 + 10.000 = 215.000$$

Jadi, biaya penggunaan air pada bulan ini sebesar Rp215.000.





AYO UJI PEMAHAMANMU!

Untuk melatih kemampuanmu tentang
Pemecahan Masalah Menggunakan Relasi dan
Fungsi, kerjakan Asesmen Formatif
halaman 187-189





Terima Kasih

